Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ

18 Ιουνίου 2019

Θέμα 1. [1] Δείξτε ότι η Ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοδύναμη με τις νόρμες

(α΄) $\|\bar{x}\|_1 = \|(x_1, \dots, x_n)\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$,

(β΄) $\|\bar{x}\|_\infty := \max\{|x_i| : \ i = 1, \dots, n\}$.

Θέμα 2. [1.5] Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $\bar{F} = (F_1, \dots, F_n)^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συνεχώς διαφορίσιμες. Δείξτε ότι η $f\,\bar{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη και ότι

$$D(f\,\bar{F}) = \bar{F}\,Df + f\,D\bar{F} \qquad \text{και} \qquad \operatorname{div}(f\,\bar{F}) = f \operatorname{div}\bar{F} + \bar{F} \cdot \operatorname{grad} f.$$

Θέμα 3. [1] Έστω $\bar{f}(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)^T$, $(r, \varphi) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi)$. Έστω, επίσης, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη και $h = g \circ \bar{f}$. Δείξτε ότι $\left\|\nabla h(1, \frac{\pi}{2})\right\| = \|\nabla g(0, 1)\|$.

Θέμα 4. [0.5+1] Έστω $C > 0$, $\alpha \in (0, 1)$ και $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \leq C\|\bar{x} - \bar{y}\|^\alpha \quad \forall\, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n. \tag{$*$}$$

(α΄) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής.

(β΄) Επιλέγοντας ελεύθερα τα $C > 0$ και $\alpha \in (0, 1)$, δώστε μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, η οποία έχει την ιδιότητα $(*)$, αλλά για κάποιο $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ δεν είναι διαφορίσιμη.

Θέμα 5. [0.5+1+0.5] Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) = x^2 + y$, όταν $y = -2x$, και $f(x, y) = 0$ παντού αλλού. Δείξτε ότι στο σημείο $(0, 0)$ η f

(α΄) είναι συνεχής,

(β΄) έχει προς κάθε κατεύθυνση $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ με $v_1^2 + v_2^2 = 1$ παράγωγο (κατά κατεύθυνση), την οποία και να προσδιορίσετε *[εννοείται: συναρτήσει της κατεύθυνσης]*,

(γ΄) δεν είναι διαφορίσιμη.

Θέμα 6. [4×0.5+1] Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ θετικά ορισμένος και συμμετρικός, $a \in \mathbb{R}$ και

$$f(\bar{x}) = a + \bar{x} \cdot A\bar{x}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n.$$

(α΄) Δείξτε ότι η f είναι άπειρες φορές συνεχώς διαφορίσιμη.

(β΄) Δώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}_0$ το πολυώνυμο Taylor βαθμού k της f στο σημείο $\bar{0}$.

(γ΄) Βρείτε το σημείο στο οποίο η f λαμβάνει το ολικό της ελάχιστο και δείξτε ότι η f δεν έχει άλλα ακρότατα.

(δ΄) Τεκμηριώστε ότι για κάθε $r > 0$ ο περιορισμός g της f στην κλειστή μπάλα $\bar{B}(0, r)$ λαμβάνει ολικό μέγιστο και ότι αυτό βρίσκεται στο $\partial B(0, r)$.

(ε΄) Βρείτε τα τοπικά και ολικά ακρότατα της $g : \bar{B}(0, r) \to \mathbb{R}$ για $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!